11. ДИРЕКТНИ ПРОИЗВОД

(11.1) Показати да је *траг* директног производа матрица $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ једнак производу трагова матрица $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, односно да је

$$\operatorname{tr}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) = \operatorname{tr}\mathscr{A}\operatorname{tr}\mathscr{B}.$$

Нека буде претпостављен најпростији облик матрица

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{и} \quad \mathscr{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

чији су трагови једнаки

$$\operatorname{tr}\mathscr{A} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = a_{11} + a_{22} \quad \text{и} \quad \operatorname{tr}\mathscr{B} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = b_{11} + b_{22}.$$

Директан производ матрица једнак је

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\cdot 2\times 2\cdot 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

док је траг тог директног производа једнак

$$\operatorname{tr}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}_{4\times 4} = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

$$= a_{11}(b_{11} + b_{22}) + a_{22}(b_{11} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) = \operatorname{tr}\mathscr{A}\operatorname{tr}\mathscr{B}$$

чиме је показано да важи задати израз.

(11.2) Одредити матрицу $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ у следећим случајевима

(а) $\mathscr{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}$, $\mathscr{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}$;

(б) $\mathscr{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}$, $\mathscr{B}=\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix}_{1\times 2}$;

(в) $\mathscr{A}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}_{2\times 1}$, $\mathscr{B}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}_{3\times 1}$.

(а) Директан производ првог пара задатих матрица једнак је

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}\otimes\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\\ 3\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix} & 1\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot 2\times 2\cdot 2}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 2\\ 8 & 10\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & 3\\ 12 & 15\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{4\times 4}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8 & 10\\ 3 & 3 & 1 & 1\\ 12 & 15 & 4 & 5\end{bmatrix}_{4\times 4}$$

(б) Директан производ другог пара задатих матрица биће

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}\otimes\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix}_{1\times 2}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix} & 3\cdot\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix}\\ 2\cdot\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix} & 3\cdot\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix} & 4\cdot\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot 1\times 3\cdot 2}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}8 & 14\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}12 & 21\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}8 & 14\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}12 & 21\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}16 & 28\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\times 6}=\begin{bmatrix}4 & 7 & 8 & 14 & 12 & 21\\ 8 & 14 & 12 & 21 & 16 & 28\end{bmatrix}_{2\times 6}$$

(в) Директан производ последњег пара датих матрица износи

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}_{2\times 1}\otimes\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}\\ 2\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot 3\times 1\cdot 1}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 6\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{6\times 1}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\\ 2\\ 2\\ 6\end{bmatrix}_{6\times 1}$$

(11.3) Показати да апсолутни базис простора $\mathbb{R}^2$ директно помножен апсолутним базисом простора $\mathbb{R}^3$ даје апсолутни базис простора $\mathbb{R}^6$.

Апсолутни базис простора $\mathbb{R}^2$ јесте

$$\left\{|e_1\rangle=(1,0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{2\times1},|e_2\rangle=(0,1)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{2\times1}\right\}$$

док је апсолутни базис простора $\mathbb{R}^3$

$$\left\{|e_1'\rangle=(1,0,0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times1},|e_2'\rangle=(0,1,0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_{3\times1},|e_3'\rangle=(0,0,1)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_{3\times1}\right\}$$

Сада треба директно помножити први базисни вектор простора $\mathbb{R}^2$ са сва три базисна вектора простора $\mathbb{R}^3$

$$|e_1\rangle\otimes|e_1'\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot3\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{6\times1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}_{6\times1}$$

$$|e_1\rangle\otimes|e_2'\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\\0\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot3\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{6\times1}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}_{6\times1}$$

$$|e_1\rangle\otimes|e_3'\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\\0\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot3\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{6\times1}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}_{6\times1}$$

а потом директно помножити други базисни вектор простора $\mathbb{R}^2$ са сва три базисна вектора простора $\mathbb{R}^3$

$$\left|e_2\right\rangle \otimes \left|e_1'\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\cdot 3\times 1\cdot 1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

$$\left|e_2\right\rangle \otimes \left|e_2'\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\cdot 3\times 1\cdot 1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

$$\left|e_2\right\rangle \otimes \left|e_3'\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\cdot 3\times 1\cdot 1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

чиме је добијен апсолутни базис простора $\mathbb{R}^6$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{6\times 1} \right\}$$

(11.4) У просторима $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ дати су оператори (у матричном облику)

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \text{и} \quad \mathscr{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

као и вектори (у матричном облику)

$$|v_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad \text{и} \quad |v_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}.$$

Израчунати на оба начина вектор (у матричном облику)

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle).$$

Први начин на који се може добити тражени вектор јесте *директним израчунавањем*, на основу наведене формуле. Прво треба добити директан производ квадратних матрица

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 1\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ 3\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ (-3)\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 4\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 0\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot 2\times 3\cdot 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ -6 & -6 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

затим директан производ матрица-колона

$$|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ (-1)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot 2\times 1\cdot 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

а потом овако добијене директне производе матрично помножити

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ -6 & -6 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

односно

$$(\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})\left(|v_1\rangle\otimes|v_2\rangle\right)=\begin{bmatrix} 2\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot(-1)+4\cdot(-1)+4\cdot 1 \\ 1\cdot 0+3\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot(-1)+2\cdot(-1)+6\cdot 1 \\ 6\cdot 0+6\cdot 0+4\cdot 1+4\cdot(-1)+4\cdot(-1)+4\cdot 1 \\ 3\cdot 0+9\cdot 0+2\cdot 1+6\cdot(-1)+2\cdot(-1)+6\cdot 1 \\ (-6)\cdot 0+(-6)\cdot 0+8\cdot 1+8\cdot(-1)+0\cdot(-1)+0\cdot 1 \\ (-3)\cdot 0+(-9)\cdot 0+4\cdot 1+12\cdot(-1)+0\cdot(-1)+0\cdot 1 \end{bmatrix}_{6\times 1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

Други начин на који је могуће добити тражени вектор (у матричном облику) јесте коришћењем израза

$$(\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})\left(|v_1\rangle\otimes|v_2\rangle\right)=\mathscr{A}|v_1\rangle\otimes\mathscr{B}|v_2\rangle$$

чиме се једноставнијим поступком израчунава тражена формула. Прво се израчуна

$$\mathscr{A}|v_1\rangle=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} 1\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot(-1) \\ 3\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot(-1) \\ (-3)\cdot 0+4\cdot 1+0\cdot(-1) \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

а потом

$$\mathscr{B}|v_2\rangle=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix} 2\cdot 1+2\cdot(-1) \\ 1\cdot 1+3\cdot(-1) \end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

па се онда овако добијена два израза директно помноже

$$\mathscr{A}|v_1\rangle\otimes\mathscr{B}|v_2\rangle=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}\otimes\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix} (-1)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ 4\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot 2\times 1\cdot 1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

чиме се, наравно, добија исти вектор (у матричном облику), али доста упрошћеније.

(11.5) Показати да у векторском простору $\mathbb{U}=\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$, где је $\dim\mathbb{V}=m$, $\dim\mathbb{W}=n$ и $\dim\mathbb{U}=mn$, поред *некорелисаних* вектора (који су директни производ вектора из $\mathbb{V}$ и вектора из $\mathbb{W}$) постоје и вектори који се таквим директним множењем не могу добити – *корелисани* вектори.

Нека је скуп вектора

$$\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_m\rangle\}$$

базис простора $\mathbb{V}$, док је скуп вектора

$$\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\ldots,|w_n\rangle\}$$

базис у простору $\mathbb{W}$.

Некорелисани вектор

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i|v_i\rangle\right)\otimes\left(\sum_{i=1}^{m}b_j|v_j\rangle\right)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_i\,b_j\,|v_i\rangle\otimes|v_j\rangle\\
&=\sum_{i=1}^{m}\Big(a_i\,b_1|v_i\rangle\otimes|v_1\rangle+a_i\,b_2|v_i\rangle\otimes|v_2\rangle+\ldots+a_i\,b_n|v_i\rangle\otimes|v_n\rangle\Big)\\
&=a_1\,b_1|v_1\rangle\otimes|v_1\rangle+a_1\,b_2|v_1\rangle\otimes|v_2\rangle+\ldots+a_1\,b_n|v_1\rangle\otimes|v_n\rangle\\
&\quad+a_2\,b_1|v_2\rangle\otimes|v_1\rangle+a_2\,b_2|v_2\rangle\otimes|v_2\rangle+\ldots+a_2\,b_n|v_2\rangle\otimes|v_n\rangle+\ldots\\
&\quad+a_m\,b_1|v_m\rangle\otimes|v_1\rangle+a_m\,b_2|v_m\rangle\otimes|v_2\rangle+\ldots+a_m\,b_n|v_m\rangle\otimes|v_n\rangle\end{aligned}$$

ће у базису простора $\mathbb{U}$

$$\{|v_1\rangle\otimes|w_1\rangle,|v_2\rangle\otimes|w_2\rangle,\ldots,|v_m\rangle\otimes|w_n\rangle\}$$

бити представљен матрицом-колоном

$$\begin{bmatrix}a_1b_1\\a_1b_2\\\vdots\\a_1b_n\\a_2b_1\\a_2b_2\\\vdots\\a_2b_n\\\vdots\\a_mb_1\\a_mb_2\\\vdots\\a_mb_n\end{bmatrix}_{mn\times1}$$

чије координате задовољавају одређене односе. Ако ти односи не важе, вектор је *корелисан*.

(11.6) Испитати који су од следећих вектора из простора $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ *корелисани* а који су *некорелисани*. За оне за које се испостави да јесу некорелисани, одредити векторе из простора $\mathbb{R}^2$, чији су они директни производи

$$(а)\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix}_{4\times1};\quad (б)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}_{4\times1};\quad (в)\begin{bmatrix}1\\3\\3\\4\end{bmatrix}_{4\times1};\quad (г)\begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix}_{4\times1}.$$

(а) Први задати вектор је *некорелисан*, пошто постоји однос између његових координата

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\\2\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot2\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{2\times1}$$

(б) Други дати вектор је *корелисан* - не постоји никакав однос између његових координата

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\\?\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot2\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}1\\?\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{2\times1}$$

(в) Трећи дати вектор је *корелисан* - не постоји никакав однос између његових координата

$$\begin{bmatrix}1\\3\\3\\4\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\\?\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot2\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}1\\?\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}_{2\times1}$$

(г) Четврти задати вектор је *некорелисан*, јер постоји однос између његових координата

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\\2\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{2\cdot2\times1\cdot1}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{2\times1}\otimes\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}_{2\times1}$$